

Câu 1. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_6 b = \log_4 \frac{a+b}{6}$. Tính tỷ số $\frac{a}{b}$

A. $\frac{a}{b} = 2$.

B. $\frac{a}{b} = 4$.

C. $\frac{a}{b} = 3$.

D. $\frac{a}{b} = 5$.

Lời giải

Đặt $t = \log_9 a = \log_6 b = \log_4 \frac{a+b}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9^t \\ b = 6^t \\ \frac{a+b}{6} = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 6^t = 6 \cdot 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = -3(\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy $\frac{a}{b} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2$.

Câu 2. Phương trình $2\cos 3x + 1 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

A. Một nghiệm.

B. Vô nghiệm.

C. Ba nghiệm.

D. Hai nghiệm..

Lời giải

Ta có

$$2\cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Các nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$.

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$.

B. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$.

C. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

D. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)-3}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$.

Khi đó: $\int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} \right) dx = 2\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C$.

Trên khoảng $(-2; +\infty)$ thì $|x+2| = x+2$.

Vậy $\int f(x)dx = \int \frac{2x+1}{(x+2)^2} dx = 2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$.

Suy ra: Đáp án B.

Câu 4. Biết $(1 + \sqrt[3]{2})^{10} = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2\sqrt[3]{4}$. Tính a_2 .

A. $a_2 = 210$.

B. $a_2 = 342$.

C. $a_2 = 45$.

D. $a_2 = 729$.

Lời giải

Ta có: $(1 + \sqrt[3]{2})^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (\sqrt[3]{2})^k$.

Nhận thấy: $(\sqrt[3]{2})^k = a \in \mathbb{Z}$ khi $k \div 3$; $(\sqrt[3]{2})^k = b\sqrt[3]{2}, b \in \mathbb{Z}$ khi k chia 3 dư 1; $(\sqrt[3]{2})^k = c\sqrt[3]{4}, c \in \mathbb{Z}$ khi k chia 3 dư 2.

Khi đó a_0 là tổng các số hạng ứng với $k \div 3$; a_1 là tổng hệ số của các số hạng chứa $\sqrt[3]{2}$ ứng với k chia 3 dư 1; a_2 là tổng hệ số của các số hạng chứa $\sqrt[3]{4}$ ứng với k chia 3 dư 2.

Các số hạng chứa $\sqrt[3]{4}$ là $C_{10}^2 (\sqrt[3]{2})^2, C_{10}^5 (\sqrt[3]{2})^5, C_{10}^8 (\sqrt[3]{2})^8$.

Vậy $a_2 = C_{10}^2 + 2C_{10}^5 + 4C_{10}^8 = 729$. Đáp án D.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

A. $-2 < m \leq -1$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải

$y = \frac{mx+4}{x+m}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2} < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$.

Câu 6. ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH ĐỒNG THÁP Biết $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$, giá trị của $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{8}{9}$.

B. $-\frac{8}{9}$.

C. $-\frac{4}{9}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có: $\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC . Gọi m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài các đường trung tuyến hạ từ các đỉnh A, B, C . Biết $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\triangle ABC$ có ba góc nhọn.

B. $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

C. ΔABC có một góc tù.

D. ΔABC là tam giác đều.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow 5\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}\right) = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10b^2 + 10c^2 - 5a^2 = 4a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác vuông tại } A.$$

Câu 8. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$, mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm các tam giác SAB , SAC , SAD chia khối chóp này thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 ($V_1 < V_2$). Tính tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$

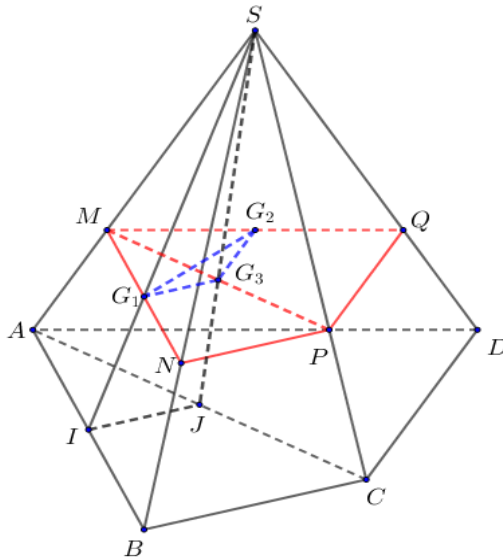
A. $\frac{8}{27}$.

B. $\frac{8}{19}$.

C. $\frac{16}{81}$.

D. $\frac{16}{75}$.

Lời giải



Gọi G_1 , G_2 , G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB , SAD , SAC .

Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB , AC thì $\frac{SG_1}{SI} = \frac{2}{3} = \frac{SG_3}{SJ}$

$$\Rightarrow G_1G_3 \parallel IJ \Rightarrow G_1G_3 \parallel (ABC).$$

Chứng minh tương tự ta có $G_2G_3 \parallel (ABC)$.

Suy ra $(G_1G_2G_3) \parallel (ABCD)$.

Qua G_1 dựng đường song song với AB , cắt SA , SB lần lượt tại M , N .

Qua N dựng đường song song với BC , cắt SC tại P .

Qua P dựng đường song song với CD , cắt SD tại Q .

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi $(G_1G_2G_3)$ là tứ giác $MNPQ$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SN.SP}{SA.SB.SC} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{8}{27} V_{S.ABC}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{8}{27} V_{S.ACD}$$

$$\text{Từ và suy ra } V_{S.MNPQ} = \frac{8}{27} V_{S.ABCD} \Rightarrow V_1 = \frac{8}{27} V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{19}{27} V. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{19}.$$

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx$ với $m \neq 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20.

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

$$\text{Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình } x^2 = mx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng (H) được cho bởi công thức

$$S = \int_0^m |x^2 - mx| dx = \int_0^m (mx - x^2) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^3}{6}.$$

$$\text{Ta có: } S < 20 \Leftrightarrow \frac{m^3}{6} < 20 \Leftrightarrow m^3 < 120 \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ do } m \text{ nguyên dương.}$$

Vậy có 4 số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3), B(-2; 2; 2)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = \frac{13}{2}$.

B. $T = 2$.

C. $T = 6$.

D. $T = \frac{29}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA}(1; -2; 3), \overrightarrow{OB}(-2; 2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

Do đó tam giác OAB vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là trung điểm của

$$AB, \text{ tâm } I\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{5}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } T = \frac{13}{2}.$$

Câu 11. Cho đa giác đều có 12 đỉnh được đặt tên bằng 12 chữ cái khác nhau, chọn ngẫu nhiên 4 chữ cái trong 12 chữ cái đó. Xác suất của biến cố “bốn chữ cái được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật” bằng

A. $\frac{1}{33}$.

B. $\frac{2}{33}$.

C. $\frac{1}{15}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho. Khi đó có 6 đường kính của đường tròn có hai đầu mút là các chữ cái đã cho. Chọn 2 trong 6 đường kính ta lập được 1 hình chữ nhật.

$$\text{Vậy số hình chữ nhật là } C_6^2 = 15.$$

Số cách chọn 4 điểm từ 12 điểm là $C_{12}^4 = 495$.

Xác suất của biến cố “bốn chữ cái được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật” bằng $\frac{15}{495} = \frac{1}{33}$

Câu 12. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y^2 = -1 \\ 2y + x^2 = -1 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. Một nghiệm.

B. Vô số nghiệm.

C. Vô nghiệm.

D. Hai nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x + y^2 = -1 \\ 2y + x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y^2 = -1 \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y^2 = -1 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\forall \begin{cases} x+1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ y+1 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ nên } x+1 \geq 0 \text{ và } y+1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó hệ } I \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y^2 = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; -1)$.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_2(4y+4) - x = 1 + 2^x - y$?

A. 11.

B. 12.

C. 2021.

D. 10.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \log_2(4y+4) - x = 1 + 2^x - y &\Leftrightarrow \log_2 4(y+1) - x = 1 + 2^x - y \\ &\Leftrightarrow 2 + \log_2(y+1) - x = 1 + 2^x - y \Leftrightarrow \log_2(y+1) + (y+1) = 2^x + x \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(y+1) \Rightarrow y+1 = 2^t.$$

Phương trình (1) trở thành $t + 2^t = 2^x + x$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$, $f'(u) = 2^u \ln 2 + 1 > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

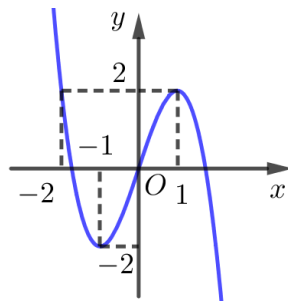
$$\text{Khi đó } t + 2^t = 2^x + x \Rightarrow t = x \Rightarrow \log_2(y+1) = x \Leftrightarrow y = 2^x - 1$$

Theo giả thiết $0 \leq y \leq 2020$ nên $0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 2021 \approx 10,98$

Vậy $x \in \{0; 1; \dots, 10\}$ có 11 giá trị và tương ứng với mỗi x có duy nhất y

Do đó có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^{f(x)} + 9m = m \cdot 3^{f(x)} + 3^{f(x)+2}$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt.

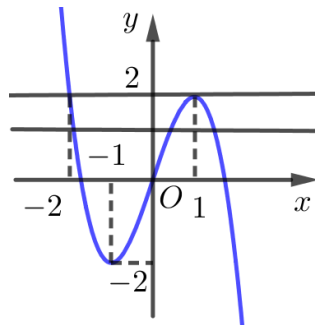
A. 8.

B. 9.

C. 7.

D. 10.

Lời giải



$$\text{Ta có } 9^{f(x)} + 9m = m \cdot 3^{f(x)} + 3^{f(x)+2} \Leftrightarrow 3^{f(x)}(3^{f(x)} - 9) = m(3^{f(x)} - 9) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{f(x)} = 9 & (1) \\ 3^{f(x)} = m & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3^{f(x)} = 3^2 \Leftrightarrow f(x) = 2. \text{ Từ đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ ta có } f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy để phương trình $9^{f(x)} + 9m = m \cdot 3^{f(x)} + 3^{f(x)+2}$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) $\Leftrightarrow f(x) = \log_3 m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khác -2 và 1 . Từ đồ thị hàm số

$y = f(x)$ suy ra $-2 < \log_3 m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < m < 9$. Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}^+$ ta được $m \in \{1; 2; \dots; 8\}$, có 8 giá trị của m .

Câu 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\angle ACB = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$.

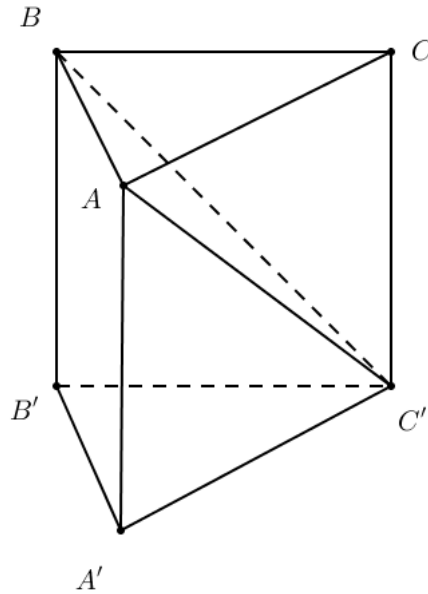
A. $V = a^3 \sqrt{6}$.

B. $V = 3a^3$.

C. $V = a^3 \sqrt{3}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $\tan 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$.

$$\text{Khi đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Hình chiếu vuông góc của cạnh BC' lên mặt phẳng $(ACC'A')$ là AC' . Khi đó $BC'A = 30^\circ$.

Xét tam giác ABC' vuông tại A ta có $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a$.

$$\text{Khi đó } CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{ABC} = a^3\sqrt{6}$$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AB . Tính chiều cao hạ từ đỉnh H của khối chóp $H.SBD$ theo a .

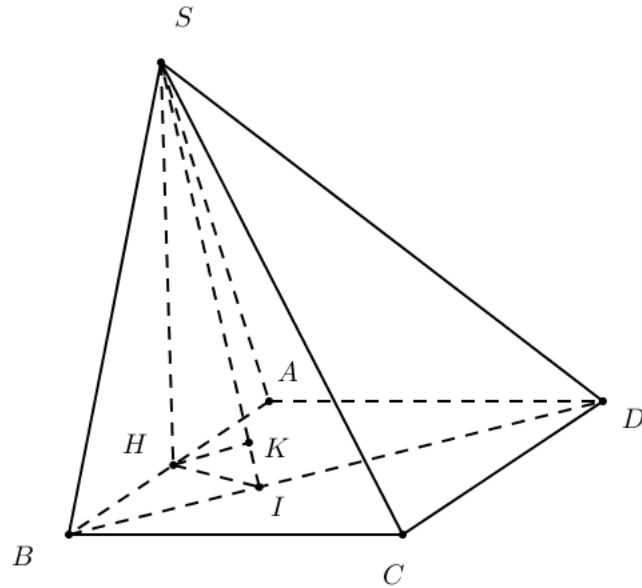
A. $\frac{3a}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải



Từ H kẻ HI vuông góc với BD ($I \in BD$) và HK vuông góc với SD ($K \in SD$). Suy ra $HK \perp (SBD)$.

Ta có $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{3}$.

$$HI = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{SH \cdot IH}{\sqrt{SH^2 + IH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Vậy chiều cao hạ từ đỉnh H của khối chóp $H.SBD$ là $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 17. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. $M + m = \frac{32}{5}$.

B. $M + m = 2$.

C. $M + m = 5$.

D. $M + m = 0$.

Lời giải

Ta có: $P(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$. $D = [-1; 1]$.

Khi đó: $P'(x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1-x^2} = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ 9(1-x^2) = 16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{9}{25} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \in [-1; 1].$$

Ta có: $P(-1) = -3$, $P(1) = 3$, $P\left(\frac{3}{5}\right) = 5$.

Vậy $M + m = -3 + 5 = 2$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 1; -1; 0$ và hai điểm $A(-4; 7; 3)$, $B(4; 4; 5)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{77}$.

C. $7\sqrt{2} - 3$.

D. $\sqrt{82} - 5$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a} = 1; -1; 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = k; -k; 0 \quad k > 0 \Rightarrow MN^2 = 2k^2 = 5\sqrt{2}^2 = 50 \Leftrightarrow k = 5 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 5; -5; 0$$

Gọi E thỏa $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MN} = 5; -5; 0 \Rightarrow E(1; 2; 3)$.

Ta thấy các điểm E, B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng Oxy vì z_E, z_B cùng dương.

Mặt khác do $z_E \neq z_B$ nên đường thẳng EB luôn cắt mặt phẳng Oxy .

Từ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $AM = EN$, vậy $|AM - BN| = |EN - BN| \leq EB$.

Dấu "=" xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng EB với mặt phẳng Oxy .

Do đó, giá trị lớn nhất của $|AM - BN| = EB = \sqrt{17}$

Câu 19. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc $[0; \pi]$ của phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{7\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{4}$.

D. $\frac{13\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} (*)$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình } 1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì các nghiệm thuộc $[0; \pi]$ nên ta có:

$$\cdot \quad 0 \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq k\pi \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{4} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ thỏa mãn } (*).$$

$$\cdot \quad 0 \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq k2\pi \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{3} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ thỏa mãn } (*).$$

$$\cdot \quad 0 \leq -\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq k2\pi \leq \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{không tồn tại } k \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}.$$

- Câu 20.** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + m^2 - 5$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 19. Tính tổng tất cả các phần tử của S .
- A. -2. B. 2. C. 4. **D. 0.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Tính } \begin{cases} f(-1) = m^2 - 3 \\ f(0) = m^2 - 5 \\ f(2) = m^2 + 15 \end{cases} \text{ ta thấy } \max_{[-1; 2]} f(x) = m^2 + 15.$$

$$\text{Do đó } \max_{[-1; 2]} f(x) = m^2 + 15 = 19 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2. \text{ Vậy } S = 0.$$

- Câu 21.** Phương trình $2 \cdot 12^x + 16^x = 9^x$ có một nghiệm dạng $x = \log_{\frac{a}{4}}(b + \sqrt{2})$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng:
- A. 4. B. 3. **C. 5.** D. 2.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2 \cdot 12^x + 16^x = 9^x &\Leftrightarrow \left(\frac{16}{9}\right)^x + 2\left(\frac{12}{9}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]^2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^x = -1 - \sqrt{2} \quad (I) \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{4}}(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Do đó theo giả thiết bài toán ta được $a = 3, b = 1$. Nên $a + 2b = 5$.

- Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m \cdot 9^x + m \cdot 4^x \leq (2m + 1)6^x$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$.
- A. $m \in (0; 6)$. B. $m \in (-\infty; 0]$. **C. $m \in (-\infty; 6]$.** D. $m \in (6; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } m \cdot 9^x - (2m + 1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m + 1)\left(\frac{6}{4}\right)^x + m \leq 0.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \text{ vì hàm số } y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ nên với } x \in (0; 1) \text{ thì } t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Bất phương trình trở thành } mt^2 - (2m + 1)t + m \leq 0 \Leftrightarrow mt^2 - 2mt + m \leq t$$

$$\Leftrightarrow m(t^2 - 2t + 1) \leq t \Leftrightarrow m(t - 1)^2 \leq t.$$

Nhận xét với mọi $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ thì $(t-1)^2 > 0$, do đó $(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2}$.

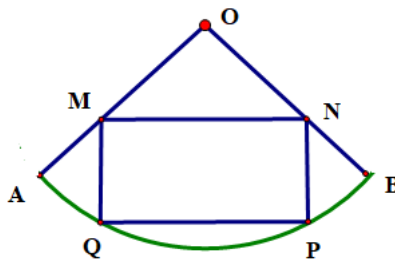
Đặt $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2}$, $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, $f'(t) = \frac{-t^2+1}{(t-1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	1	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$f(1)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương $m \leq f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq 6$.

Câu 23. Từ một tấm tôn hình quạt OAB có $OA=2, AOB=120^\circ$ người ta xác định hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của OA,OB rồi cắt tấm tôn theo hình chữ nhật MNPQ như hình vẽ.



Dùng hình chữ nhật đó tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ với đường sinh MQ,NP trùng khít nhau .Khối trụ tương ứng được tạo thành có thể tích là:

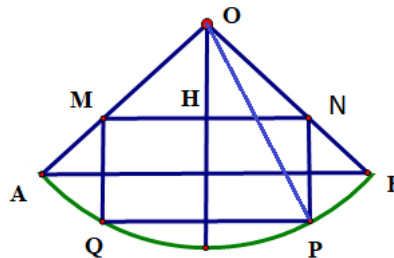
A. $3\sqrt{3}\pi$.

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

C. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$.

D. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{8\pi}$.

Lời giải



Áp dụng định lý cosin cho tam giác OAB ta có:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3} \Rightarrow MN = \sqrt{3}$$

Dễ thấy tam giác OHN vuông và có góc $HON = 60^\circ \Rightarrow ONP = 120^\circ$

Đặt $NP = x$, $ON = 1$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ONP ta có:

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 - 2.ON.NP \cos 120^\circ \Rightarrow 4 = 1 + x^2 - 2.1.x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = NP = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Ta có chu vi đường tròn đáy hình trụ chính là cạnh MN

$$\text{Bán kính đường tròn đáy của hình trụ là: } r = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

$$\text{Chiều cao của hình trụ là } NP = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Vậy thể tích hình trụ là

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{3(-1 + \sqrt{13})}{8\pi}$$

Suy ra: Đáp án D

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gọi $I(a, b, c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1, -1, 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

A. $P = 6$

B. $P = 0$

C. $P = 9$

D. $P = 3$

Lời giải

Phương trình mặt cầu có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với cả 3 mặt phẳng tọa độ nên $|a| = |b| = |c| = R$.

Trường hợp 1: $a = b = c$ ta có $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$ (*)

Vì mặt cầu đi qua điểm $A(1, -1, 4)$ nên ta có: $(1-a)^2 + (-1-a)^2 + (4-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 7 = 0$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $a = -b = -c$ ta có $(x-a)^2 + (y+a)^2 + (z+a)^2 = a^2$

Vì mặt cầu đi qua điểm $A(1, -1, 4)$ nên ta có: $(1-a)^2 + (-1+a)^2 + (4+a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 9 = 0$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 3: $a = b = -c$ ta có $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z+a)^2 = a^2$

Vì mặt cầu đi qua điểm $A(1, -1, 4)$ nên ta có: $(1-a)^2 + (-1-a)^2 + (4+a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 7 = 0$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 4: $a = -b = c$ ta có $(x-a)^2 + (y+a)^2 + (z-a)^2 = a^2$

Vì mặt cầu đi qua điểm $A(1, -1, 4)$ nên ta có:

$$(1-a)^2 + (-1+a)^2 + (4-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Suy ra tâm $I(3, -3, 3)$.

Do đó $P = 3 + 3 + 3 = 9$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$ và $f(0) = 2$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ là:

A. $(x-2)e^{2x} + e^x + C.$

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C.$

C. $(x-1)e^x + C.$

D. $(x+1)e^x + C.$

Lời giải

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x f(x) + e^x f'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = 1.$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được : $e^x f(x) = x + C$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = C \Rightarrow f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}.$$

$$\int f(x)e^{2x} dx = \int (xe^{-x} + 2e^{-x})e^{2x} dx$$

$$= \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)de^x = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C$$

Suy ra: Đáp án D.

Câu 26. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình bình hành có diện tích bằng $\frac{18}{5}$

$AB = 2, AD = 3$, BAD là góc nhọn, $AA' = 1$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'BD), (CB'D')$ bằng

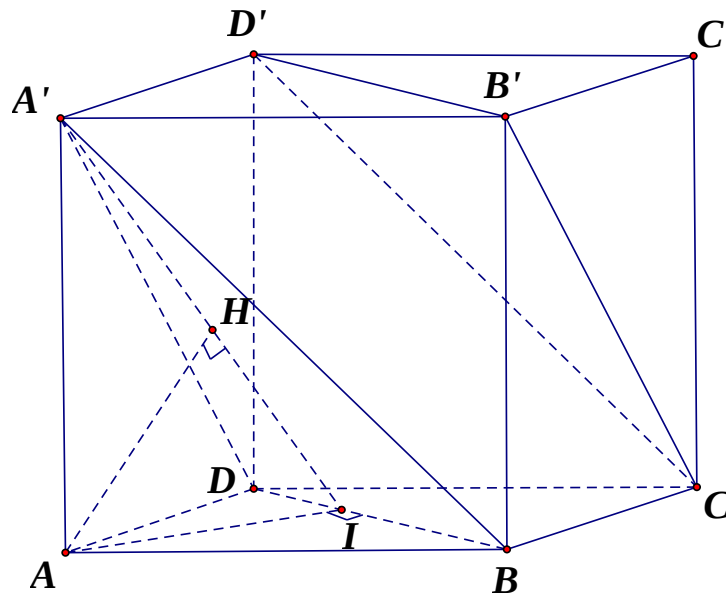
A. $\frac{6}{7}.$

B. $\frac{18}{\sqrt{409}}.$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{7}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải



Ta có $(A'BD) \parallel (CB'D') \Rightarrow d[(A'BD), (CB'D')] = d[D', (A'BD)] = d[A, (A'BD)]$

Dựng $AI \perp BD$, $AH \perp A'I \Rightarrow AH = d(A, (A'BD)).$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \sin A = \frac{18}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}.$$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác ABD , ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A \Rightarrow BD = \sqrt{4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{85}}{5}.$$

$$\Rightarrow AI = \frac{2S_{\triangle ABD}}{BD} = \frac{18}{\sqrt{85}}$$

Xét $\triangle A'AI$ vuông tại A có AH là đường cao, nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{85}{324} + 1 = \frac{409}{324} \Rightarrow AH = \frac{18}{\sqrt{409}}$$

$$\text{Vậy } d[(A'BD), (CB'D')] = AH = \frac{18}{\sqrt{409}}$$

Câu 27. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền là $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

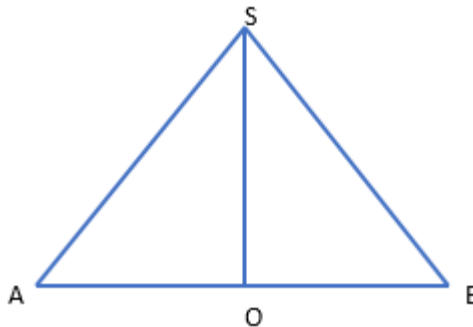
A. $3\pi\sqrt{3}$.

B. $3\pi\sqrt{2}$.

C. $\pi\sqrt{3}$.

D. 3π .

Lời giải



Giả sử tam giác SAB là một thiết diện qua trục của hình nón có đáy là đường tròn tâm O .

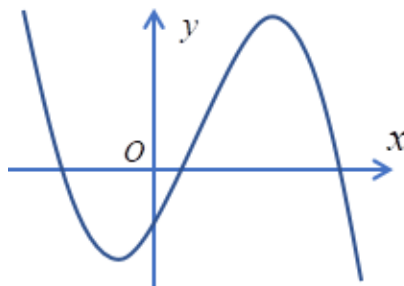
Khi đó độ dài đường sinh: $SA = SB = AB \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{6}$

Bán kính đường tròn đáy là: $r = OA = OB = \sqrt{3}$

Chiều cao của khối nón: $h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3}$

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \pi\sqrt{3}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới.



Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Dựa vào dạng đồ thị suy ra $a < 0$

Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung $\Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow 3a.c < 0 \Rightarrow c > 0$

Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số. Từ đồ thị ta thấy

$$x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-2b}{2.(3a)} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0 \Leftrightarrow b > 0$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm nằm dưới Ox nên suy ra $d < 0$

Vậy trong các giá trị a, b, c, d có 2 giá trị âm

Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tam giác SAC đều cạnh a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

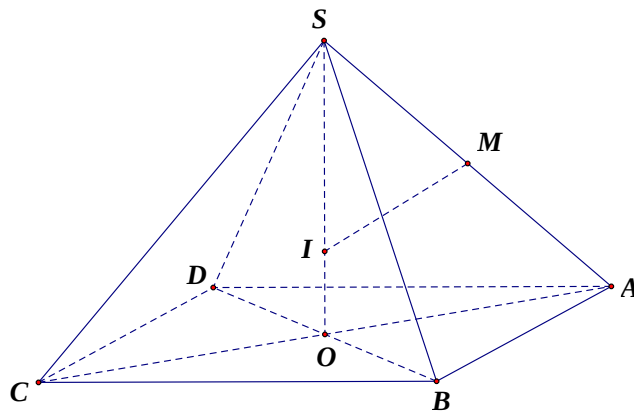
A. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $R = a$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có: Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC$.

Do ΔSAC đều cạnh a nên $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M là trung điểm SA , trong (SAC) kẻ $MI \perp SA$ tại $I \in SO$.

Khi đó: $IA = IS = IB = IC = ID$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD \Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = IS$.

$$\text{Ta có: } \Delta MSI \sim \Delta OSA (g.g) \Rightarrow \frac{MS}{OS} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow R = SI = \frac{MS \cdot SA}{OS} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y = \log_{2021}(x^2 - 3x)$ là:

A. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

C. $(0; 3)$.

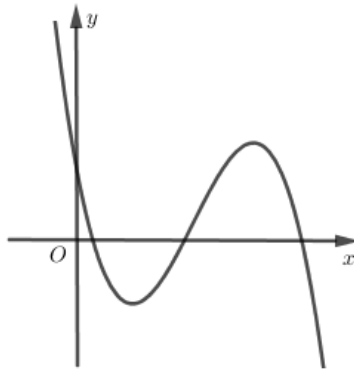
D. $[0; 3]$.

Lời giải

Điều kiện để hàm số $y = \log_{2021}(x^2 - 3x)$ có nghĩa là $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$.

Tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là



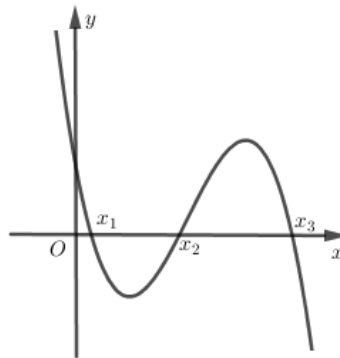
A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải



Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases} \quad (x_1 < x_2 < x_3)$

BBT:

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$								

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại.

Suy ra: Đáp án C.

Câu 32. Với V là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $V = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx.$

B. $V = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx.$

C. $V = \pi \int_1^e x \ln x dx.$

D. $V = \pi \int_1^e x \ln x^2 dx.$

Lời giải

$$\text{Xét phương trình hoành độ: } x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $V = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$

Suy ra: Đáp án B.

Câu 33. Cấp số nhân (u_n) là một dãy tăng và thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_4 = 28 \\ u_3 + u_6 = 252 \end{cases}$. Công bội q của (u_n) là

A. $q = \pm 3.$

B. $q = 2.$

C. $q = 3.$

D. $q = -3.$

Lời giải

Ta có Cấp số nhân (u_n) có công bội q nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

$$\text{Từ giả thiết } \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q^3 = 28 \\ u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^5 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^3) = 28 & (1) \\ u_1 q^2 (1 + q^3) = 252 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia (1) về theo về ta được $q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$. Lại vì (u_n) là một dãy tăng nên $q = 3$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$ $f(x) \neq -\frac{1}{x}$ và

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Tính } \int_1^4 f(x) dx.$$

A. $-2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$

B. $-2 \ln 2 - \frac{1}{4}.$

C. $-\ln 2 - \frac{3}{4}.$

D. $-\ln 2 - \frac{1}{4}.$

Lời giải

Từ giả thiết

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = (xf(x))'$$

$$\Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = (xf(x) + 1)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{(xf(x) + 1)'}{[xf(x) + 1]^2} = 1 \left(\text{do } f(x) \neq -\frac{1}{x}, \forall x \right)$$

$$\text{Do đó } \int \frac{(xf(x) + 1)'}{[xf(x) + 1]^2} dx = \int 1 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + C$$

Mà $f(1) = -2 \Rightarrow -\frac{1}{f(1)+1} = 1 + C \Rightarrow C = 0$. Suy ra

$$-\frac{1}{xf(x)+1} = x \Leftrightarrow -1 = x^2 f(x) + x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln|x| \right) \Big|_1^4 = -2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Câu 35. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 - (3m^2 - 1)x + m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 0$. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - mx - 3m^2 + 1$.

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } \begin{cases} (-m)^2 - 4(-3m^2 + 1) > 0 \\ -3m^2 + 1 + 2(m) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13m^2 - 4 > 0 \\ -3m^2 + 2m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13m^2 - 4 > 0 \\ m = \frac{5}{3} \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{3} \\ m = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S \text{ có 1 phần tử vì } m \in \mathbb{Z}.$$

Câu 36. Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(1-m)\log_3^2 x + (m-5)\log_3 x + 1 - m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $m_0 \in \left(-\frac{5}{3}; 0\right)$.

B. $m_0 \in (-5; -3)$.

C. $m_0 \in \left(-2; \frac{7}{3}\right)$.

D. $m_0 \in \left(-4; -\frac{5}{3}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x$, suy ra $t \in [-1; 2]$. Phương trình trở thành $(1-m)t^2 + (m-5)t + 1 - m = 0$.

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 = m(t^2 - t + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} = m$$

Xét $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ trên $[-1; 2]$.

$$\text{Cho } f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

$$\text{Ta có } f(-1) = \frac{7}{3}; f(1) = -3; f(2) = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[-1; 2]} f(t) = f(1) = -3; \max_{[-1; 2]} f(t) = f(-1) = \frac{7}{3}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.

$$\Leftrightarrow \min_{[-1;2]} f(t) \leq m \leq \max_{[-1;2]} f(t)$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}. \text{ Vậy } m_0 = -3 \in \left(-4; -\frac{5}{3}\right).$$

Câu 37. ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH ĐỒNG THÁP Cho dãy số (a_n) có số hạng tổng quát

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \text{ Gọi } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \text{ Tìm } \lim S_n.$$

A. $\lim s_n = 0$.

B. $\lim s_n = 1$.

C. $\lim s_n = +\infty$.

D. $\lim s_n = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim S_n = 1.$$

Câu 38. Xét $\int_0^1 x^3 (x^2 + 2020)^{2021} dx$, nếu đặt $u = x^2 + 2020$ thì tích phân $\int_0^1 x^3 (x^2 + 2020)^{2021} dx$ bằng.

A. $\frac{1}{2} \int_0^1 (u - 2020) u^{2021} du$.

B.

$2 \int_{2020}^{2021} (u - 2020) u^{2021} du$.

C. $\int_0^1 (u - 2020) u^{2021} du$. $\lim s_n = +\infty$.

D. $\frac{1}{2} \int_{2020}^{2021} (u - 2020) u^{2021} du$.

Lời giải

$$\text{Đặt } u = x^2 + 2020 \Rightarrow x^2 = u - 2020 \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow u = 2020; x = 1 \Rightarrow u = 2021$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 x^3 (x^2 + 2020)^{2021} dx = \int_{2020}^{2021} x^2 (x^2 + 2020)^{2021} x dx = \frac{1}{2} \int_{2020}^{2021} (u - 2020) u^{2021} du$$

Câu 39. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $bc + 2ca + 3ab - abc = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $P = abc$ bằng

A. 162.

B. 27.

C. 6.

D. 54.

Lời giải

$$\text{Ta có } bc + 2ca + 3ab - abc = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \Rightarrow 1 \geq \frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow abc \geq 162.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$$

Vậy $P_{\min} = 162$ khi $a = 3, b = 6, c = 9$

Câu 40. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 + 4x - 5|$ trên đoạn $[-3; 0]$. Tính $M + m$

A. 5.

B. 9.

C. 14.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \begin{cases} 2x+4 & \text{khi } \begin{cases} x > 1 \\ x < -5 \end{cases} \\ -2x-4 & \text{khi } -5 < x < 1 \end{cases}$$

Xét trên đoạn $[-3; 0]$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-3; 0]$

Suy ra $y(-3) = 8, y(-2) = 9, y(0) = 5$. Do đó $M = 9, m = 5$. Vì vậy $M + m = 9 + 5 = 14$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 2; 2)$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4; 1; -1)$. Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C ?

A. $P\left(\frac{3}{4}; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $Q\left(-\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

D. $N\left(-\frac{3}{4}; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Gọi $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)^2 + 2^2 + (2-z)^2 = (-2-x)^2 + 2^2 + z^2 \\ (2-x)^2 + 2^2 + (2-z)^2 = (4-x)^2 + 1^2 + (z+1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=1 \\ 2x-3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } P\left(\frac{3}{4}; 0; -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 2)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(0; -1; 3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Nếu biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. 2.

B. 6.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2); \overrightarrow{AC} = (-1; -2; 1)$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra $G(0; 0; 3)$. Nhận thấy G nằm ngoài mặt cầu.

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn IG và mặt cầu, với $I(0; 0; 1)$ là tâm của mặt cầu.

$$\text{Đường thẳng } IG \text{ nhận } \overrightarrow{IG}(0; 0; 2) \text{ là VTCP nên có phương trình là } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \begin{cases} z = 0 \\ z = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Với $M(0;0;0)$ thì $MG = 3$;

Với $M(0;0;2)$ thì $MG = 1$;

Do đó MG đạt giá trị nhỏ nhất với $M(0;0;2)$. Khi đó $AM = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{2}$

Câu 43. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thoi, $BAD = 60^\circ$, tam giác SBD đều, $SA = 2SC$. Tính cosin của góc giữa SB và $(ABCD)$.

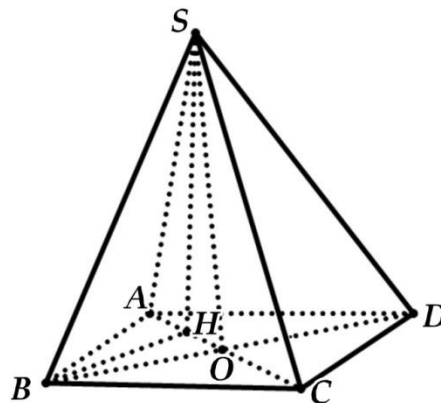
A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{13}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



- Giả sử hình thoi $ABCD$ cạnh a .
- Gọi O là giao điểm của AC và BD .
- Kẻ $SH \perp AC, H \in AC$ (1)
- Ta có $BD \perp SO, BD \perp AC$ suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SH$ (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $SH \perp (ABCD)$.
- Tam giác ABD và SBD đều $\Rightarrow SO = OA = OC$ nên tam giác SAC vuông tại S
 $\Rightarrow SA^2 + SC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 5SC^2 = 3a^2 \Leftrightarrow SC = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow SA = \frac{2a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$.
- Tam giác SBD đều suy ra $SB = a$.
- Tam giác SBH : $BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{5}$.
- $\cos SBH = \frac{BH}{SB} = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$-$	0	$+$
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$
		-4		-2	

Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

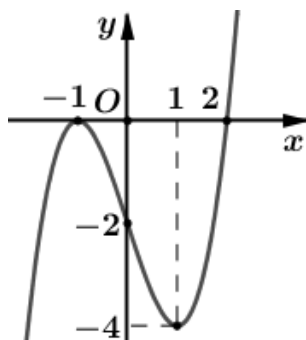
C. 4.

D. 2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 2$ và một đường tiệm cận đứng $x = 0$. Do đó đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 45. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Do đó $g'(x)$ đổi dấu 2 lần khi qua $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{3}$ nên $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 2 điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = -2f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = -2f'(x) = -2(x^2 - x)$.

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$

Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 47. Tìm tất các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{m+1-x^2-2x}$ có nghiệm thực.

A. $m \in [0; 7]$.

B. $m \in [2; +\infty)$.

C. $m \in [6; 7]$.

D. $m \in (-\infty; 7]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ m+1-x^2-2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t' = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên:

x	-3	-1	1
t'	$+$	0	$-$
t	2	$2\sqrt{2}$	2

Suy ra $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

$$\text{Ta có: } t^2 = 4 + 2\sqrt{3-2x-x^2} \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = \left(\frac{t^2-4}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 1 = \frac{t^4-8t^2+8}{4}$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành: } t = \sqrt{m + \frac{t^4-8t^2+8}{4}} \Leftrightarrow m = \frac{-t^4+12t^2-8}{4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{-t^4+12t^2-8}{4} \text{ với } t \in [2; 2\sqrt{2}].$$

$$f'(t) = -t^3 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \notin [2; 2\sqrt{2}] \\ t = \sqrt{6} \in [2; 2\sqrt{2}] \\ t = -\sqrt{6} \notin [2; 2\sqrt{2}] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
f'	+	0	-
f		7	

$6 \xrightarrow{\quad} 7 \xrightarrow{\quad} 6$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m \in [6; 7]$

Hãy là phương trình đã cho có nghiệm khi $m \in [6; 7]$. Chọn đáp án C.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-3)$, $B(4;2;1)$, $C(3;0;5)$. Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm tam giác ABC . Tính $P = abc$.

A. $P = 5$.

B. $P = 4$.

C. $P = 0$.

D. $P = 3$.

Lời giải

Vì $G(a;b;c)$ là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} a = \frac{2+4+3}{3} = 3 \\ b = \frac{1+2+0}{3} = 1 \\ c = \frac{-3+1+5}{3} = 1 \end{cases}$$

Suy ra $P = abc = 3$.

Suy ra: Đáp án D.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $MNPQ$ có tâm $I(3;1)$, đỉnh M thuộc đường thẳng $x - 4y + 1 = 0$, đỉnh N thuộc đường thẳng $x - y + 8 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh Q .

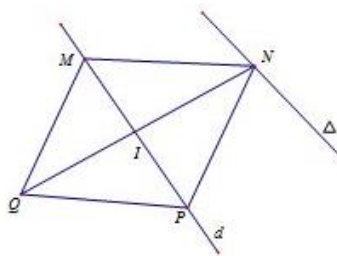
A. $Q(-11;-3)$.

B. $Q(16;4)$.

C. $Q(-5;7)$.

D. $Q(5;-7)$.

Lời giải



Gọi 2 đường thẳng $x - 4y + 1 = 0$; $x - y + 8 = 0$ lần lượt là d và Δ .

Vì $I(3;1) \in d, M \in d \Rightarrow d \equiv IM$.

Khi đó đường thẳng IN đi qua I và vuông góc với IM

$\Rightarrow$ phương trình IN là: $4x + y - 13 = 0$.

Vì $N = IN \cap \Delta \Rightarrow$ tọa độ của N là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y - 13 = 0 \\ x - y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow N(1;9).$$

$$\text{Vì } I \text{ là trung điểm } QN \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_Q + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_Q + y_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = 5 \\ y_Q = -7 \end{cases} \Rightarrow Q(5; -7).$$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(-3; 4; 2)$, $N(-5; 6; 2)$, $I(-10; 17; -7)$.
Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính MN .

A. $(x+10)^2 + (y+17)^2 + (z+7)^2 = 8.$

B. $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z-7)^2 = 12.$

C. $(x-10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 12.$

D. $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8.$

Lời giải

Ta có: $MN = 2\sqrt{2}$. Suy ra mặt cầu (S) tâm $I(-10; 17; -7)$ bán kính MN có phương trình là $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$.